# BAB II
# MATERI DASAR

## 2.1. Ruang Metrik

Definisi 1

Diberikan himpunan X yang tidak kosong, yang elemen-elemennya disebut titik. Didefinisikan fungsi berharga real non negatif d pada X x X (jadi d fungsi dua veriabel dengan variabel-variabelnya pada X), sebagai berikut :

a. $d(x,y) \geq 0$ ; $d(x,y) = 0$ jhj $x = y$

b. $d(x,y) = d(y,x)$

c. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ , untuk sembarang $z \in X$

Fungsi d yang memenuhi ketiga sifat di atas dinamakan **fungsi jarak** atau **metrik** pada X

Nilai $d(x,y)$ dinamakan **jarak** dari x ke y

Definisi 2

Himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi jarak d, disebut **ruang metrik**

## 2.2. Sekitar dan Titik Cluster

Definisi 3

Jika p sembarang titik di dalam ruang metrik X dan $r > 0$, maka himpunan $N_r(p) = \{ x \in X \mid d(p,x) < r \}$ dinamakan **daerah sekitar titik p dengan radius r**, dan disingkat dengan **sekitar titik p dengan radius r**. Titik p dinamakan **pusat dari sekitar** $N_r(p)$

Jadi setiap titik mempunyai tak berhingga banyak sekitar

## 2.3. Himpunan Terbuka dan Tertutup

Definisi 4

Himpunan $G \subseteq R$ dikatakan **terbuka** jika untuk setiap $x \in G$ terdapat sekitar x ( $= V_x$ ) sedemikian sehingga $V_x \subset G$

Himpunan $F \subseteq R$ dikatakan **tertutup** jika $F^c$ terbuka

Definisi 5

Untuk titik $x \in R$ disebut **titik cluster** (cluster point) dari $S \subset R$, jika setiap sekitar dari x ( $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ) memuat sedikitnya satu titik $q \in S$ dan $q \neq x$

Theorema 1

Himpunan $F \subseteq R$ adalah tertutup jika dan hanya jika F memuat semua titik clusternya

Bukti

($\Longrightarrow$)Dimisalkan F tertutup, dan x titik cluster dari F

Akan dibuktikan bahwa $x \in F$

Andaikan $x \notin F$, maka $V_\varepsilon(x) \subseteq F^c$ sehingga $V_\varepsilon(x) \cap F = \emptyset$. Padahal dari pemisalan bahwa x merupakan titik cluster dari F, sehingga dari definisi (5) $V_\varepsilon(x) \cap F \neq \emptyset$ . Tercapai kontradiksi dengan pengandaian.

Jadi F tertutup $\longrightarrow$ F memuat semua titik clusternya.

($\Leftarrow$)Dimisalkan F memuat semua titik clusternya.

Untuk $y \notin F \longrightarrow y \in F^c$, sehingga $V_\varepsilon(y) \subseteq F^c$.

Karena y elemen sembarang dari $F^c$ dan $V_\varepsilon(y) \subseteq F^c$, maka menurut definisi (4), $F^c$ terbuka, sehingga F tertutup.

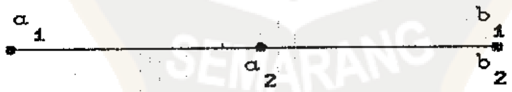
Jadi F memuat semua titik clusternya $\longrightarrow$ f tertutup.

Theorema 2

Setiap himpunan terbatas di dalam R yang memuat titik tak berhingga banyaknya mempunyai paling sedikit satu titik cluster

Bukti

Himpunan adalah terbatas, jadi dapat diletakkan di suatu interval $[a_1,b_1]$. Bagilah interval $[a_1,b_1]$ menjadi dua bagian yang sama.




gambar 1 :

Interval tertutup $[a_1,b_1]$ dibagi menjadi dua bagian yang sama

Paling sedikit satu dari kedua bagian itu memuat titik tak berhingga banyaknya. Sebutlah interval ini $[a_2,b_2]$. Interval ini dibagi lagi menjadi dua bagian yang sama, begitu seterusnya. Kita peroleh interval $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, ....., $[a_n,b_n]$.

Interval $[a_n,b_n]$ terletak dalam interval $[a_{n-1},b_{n-1}]$ dan memuat tak berhingga banyak titik. Karena panjang $[a_n,b_n]$ sama dengan $\left(\dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}\right)$, maka panjang interval ini menuju nol. Jelas ada satu titik g yang terletak di semua interval $[a_n, b_n]$, n = 1,2,3,..... Di sekitar titik g kita mengambil interval (p,q) dan di dalam (p,q) ada interval $[a_N, b_N]$, yang di dalamnya terletak titik tak berhingga banyaknya, sehingga menurut definisi (5) g merupakan titik cluster.

## 2.4. Himpunan Kompak

Definisi 6

**Selimut terbuka** (open cover) dari suatu himpunan E di dalam ruang metrik X adalah suatu keluarga himpunan-hipunan terbuka $\{G_\alpha\}$ yang merupakan himpunan bagian dari X, sedemikian sehingga $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$

Definisi (6) menunjukkan bahwa untuk setiap $x \in E$, terdapat suatu $\alpha$ sedemikian sehingga $x \subset G_\alpha$

Definisi 7

Suatu himpunan bagian K dalam ruang metrik X disebut **Kompak** jika setiap selimut terbuka (open cover) dari K memuat sub selimut berhingga yang masih menyelimuti himpunan K

Jelasnya apabila keluarga himpunan terbuka $\{G_\alpha\}$ suatu selimut terbuka untuk himpunan kompak K, maka dapat dicari indeks $\alpha_1$, $\alpha_2$, ....., $\alpha_n$ yang cacahnya berhingga sedemikian sehingga

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \ldots\ldots \cup G_{\alpha_n}$$

## 2.5. Himpunan Terhubung

Definisi 8

Dua himpunan A dan B dalam suatu ruang metrik X disebut **terpisah** jika $\overline{A} \cap B = \emptyset$ dan $A \cap \overline{B} = \emptyset$

Definisi 9

Himpunan E dalam ruang metrik X dinamakan **terhubung** (conected) jika E tidak dapat disajikan sebagai gabungan dua himpunan yang terpisah dan tidak kosong

## 2.6. Kekonvergenan suatu Barisan

### 2.6.1. Barisan Konvergen

Himpunan semua bilangan bulat positip ( = himpunan bilangan alam ) dinotasikan dengan N.

Jadi N = { 1,2,3,.....}

Definisi 10

Barisan titik-titik di dalam ruang metrik (X,d) adalah suatu fungsi dari N ke dalam X

Jika $f(n) = S_n$ untuk $n \in N$, maka untuk menyatakan barisan fungsi f biasa digunakan lambang $\langle S_n \rangle$ atau ditulis dengan lebih lengkap sebagai $S_1, S_2, \ldots..$

Nilai-nilai fungsi untuk f, dinamakan **unsur barisan** atau **suku barisan**

Definisi 11

Suatu barisan $\langle S_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan **konvergen** jika terdapat suatu titik $s \in X$

dengan sifat :

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu bilangan bulat positip p sedemikian sehingga untuk semua $n \geq p$ berlaku $d(S_n, s) < \varepsilon$

Dalam hal ini juga dikatakan bahwa barisan $\langle S_n \rangle$ konvergen ke s atau s adalah limit barisan $\langle S_n \rangle$, dan ditulis sebagai $S_n \longrightarrow s$ atau $\lim_{n \to \infty} S_n = s$

Theorema 3

Jika barisan $\langle S_n \rangle$ dalam suatu ruang metrik $(X,d)$ adalah konvergen maka barisan $\langle S_n \rangle$ terbatas

Bukti

Diandaikan $S_n \longrightarrow s$, dan diambil $\varepsilon = 1$

Maka terdapat bilangan asli p sehingga untuk semua $n \geq p$ berlaku $d(S_n, s) < 1$.

Selanjutnya diambil $M = \max \{1, d(S_1,s), d((S_2,s), \ldots\ldots, d(S_{p-1},s)\}$ maka $d(S_n,s) \leq M$ untuk $1 \leq n \leq p-1$, dan $d(S_n,s) < 1 \leq M$ untuk $n \geq p$

Jadi daerah jangkau barisan $\langle S_n \rangle$ merupakan himpunan terbatas dan $\langle S_n \rangle$ dinamakan barisan terbatas.

Definisi 12

Suatu barisan real $\langle S_n \rangle$ dikatakan :

a. **Naik monoton** jika $S_n \leq S_{n+1}$, untuk $n = 1,2,3,\ldots.$

b. **Turun monoton** jika $S_n \geq S_{n+1}$, untuk $n = 1,2,3,\ldots..$

Theorema 4

Barisan yang monoton adalah konvergen jika dan hanya jika barisan itu terbatas

Bukti

($\Leftarrow$) Diberikan barisan monoton naik $\langle S_n \rangle$, jadi $S_n \le S_{n+1}$, $\forall\, n \in N$. Misalkan daerah jangkaunya $\{S_n\} = E$

Diandaikan E terbatas, jadi E tidak kosong dan terbatas ke atas. Karena R mempunyai sifat batas atas terkecil maka terdapat $s \in R$ sedemikian sehingga $s = \sup E$. Dengan demikian berlaku :

$$S_n \le s \ , \ \forall\, n \in N \qquad \ldots\ldots(a)$$

Karena $s = \sup E$, maka untuk sembarang $\varepsilon > 0$ terdapat indeks p sedemikian sehingga

$$s - \varepsilon < S_p < s + \varepsilon \qquad \ldots\ldots(b)$$

Karena $\langle S_n \rangle$ monoton naik, maka :

$$S_p \le S_n \ , \ \forall\, n \ge p \qquad \ldots\ldots(c)$$

Mengingat (a), (b), (c) maka untuk semua $n \ge p$ berlaku :

$$s - \varepsilon < S_n < s$$

Jadi $s - \varepsilon < S_n < s + \varepsilon$ atau $|S_n - s| < \varepsilon$ , $\forall\, n \ge p$

Dengan demikian $S_n$ konvergen ke s

($\Rightarrow$) Menurut theorema (3) bahwa jika barisan $\langle S_n \rangle$ konvergen maka $\langle S_n \rangle$ terbatas

Sehingga lengkap bukti theorema (4)

### 2.6.2. Sub Barisan

Definisi 13

Diberikan suatu barisan $\langle S_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X,d), dibentuk barisan bilangan asli $\langle n_k : k \in N \rangle$ sedemikian sehingga $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\ldots$

maka barisan $\langle S_{n_k} : k \in N \rangle$ dinamakan **sub barisan** dari barisan $\langle S_n \rangle$. Jika $\langle S_{n_k} \rangle$ konvergen, maka limitnya disebut **limit sub barisan** $\langle S_{n_k} \rangle$ dari barisan $\langle S_n \rangle$

Jadi suatu sub barisan dari $\langle S_n \rangle$ adalah suatu barisan yang suku-sukunya secara keseluruhan merupakan bagian dari keseluruhan suku-suku $\langle S_n \rangle$ dengan syarat bahwa urutan letak suku-sukunya seperti urutan letak pada $\langle S_n \rangle$

Theorema 5

Jika barisan $\langle S_n \rangle$ suatu barisan di dalam ruang metrik X yang kompak, maka $\langle S_n \rangle$ memuat sub barisan yang konvergen ke suatu titik di dalam X

Bukti

Dibedakan untuk daerah jangkau $E = \{S_n\}$ berhingga dan tak berhingga

a. Dimisalkan daerah jangkau E berhingga

Maka paling sedikit ada satu elemen $s \in E$, sehingga $s = S_n$ untuk tak berhingga banyak indeks n, sebab $S_n$ merupakan fungsi dengan domain himpunan tak berhingga N. Dengan demikian kita dapat membentuk suatu barisan $\langle n_k : k \in N \rangle$ sehingga $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ dan

$S_{n_1} = S_{n_2} = S_{n_3} = \ldots\ldots = s$

Jadi yang kita peroleh ini merupakan suatu sub barisan yang konvergen ke $s \in E \subset X$

b. Dimisalkan E tak berhingga

Karena E himpunan bagian ruang metrik X yang kompak, dan karena himpunan kompak mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass (= yaitu setiap sub set tak berhingga himpunan X mempunyai titik limit $p \in X$), maka E mempunyai titik limit $p \in X$, dan dapat dibentuk suatu barisan di dalam E yang konvergen ke p. Dipilih $n_1$ sehingga $d(S_{n_1},p) < 1$. Selanjutnya dipilih $n_2$ sehingga $n_1 < n_2$ dan $d(S_{n_2},p) < \frac{1}{2}$

Setelah dipilih $n_1 < n_2 < \ldots\ldots < n_{k-1}$, maka dipilih sehingga $n_k > n_{k-1}$ dan $d(S_{n_k},p) < \frac{1}{k}$

Terbentuklah sub barisan $\langle S_{n_k} \rangle$ yang konvergen ke p untuk $k \longrightarrow \infty$ , sebab jika diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang, maka dapat dicari P sehingga untuk $k \geq P$ berlaku

$\frac{1}{k} < \varepsilon$

Jadi $d(S_{n_k},p) < \frac{1}{k} < \varepsilon$ untuk semua $k \geq P$ dan dengan demikian $\lim\limits_{k \to \infty} S_{n_k} = p$

Theorema 6

Setiap barisan yang terbatas di dalam $R^k$ memuat suatu sub barisan yang konvergen

Bukti

Dimisalkan $\langle S_n \rangle$ suatu barisan yang terbatas di dalam $R^k$. Jadi daerah jangkau $E = \{S_n\}$ merupakan himpunan terbatas di dalam $R^k$. Dengan demikian terdapatlah suatu sel-k $I = \{ x = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_k)\}$ dengan $a_j \leq x_j \leq b_j$, sehingga $E \subset I$. Karena I merupakan sub set kompak $R^k$, maka berdasarkan theorema (5) $\langle S_n \rangle$ memuat sub barisan yang konvergen

## 2.7. Fungsi Kontinu

Definisi 14

Diberikan ruang metrik $(X,d_1)$ dan $(Y,d_2)$, $p \in E \subset X$ , dan f fungsi dari E ke dalam Y

Fungsi F dikatakan kontinu di titik p jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga untuk semua $x \in E$ dan $d_1(x,p) < \delta$ berlaku $d_2(f(x),f(p)) < \varepsilon$

Atau ditulis :

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in E \cap N_\delta(p) \longrightarrow d_2(f(x),f(p)) < \varepsilon)$

Jika f kontinu di setiap titik anggota E, maka dikatakan bahwa f kontinu pada E

## 2.8. Persamaan Differensial (PD)

Definisi 15

Suatu **persamaan differensial** adalah suatu persamaan yang memuat suatu derivatif atau diferensial

Definisi 16

Tingkat (orde) dari suatu persamaan differensial adalah derivatif tertinggi yang terdapat di dalam persamaan itu

### 2.8.1. <u>Persamaan Differensial Tingkat 1</u>

Definisi 17

$y = f(x)$ disebut solusi dari PD $\varphi(x,y,y') = 0$ dalam interval I, jika :

i. $y = f(x)$ mempunyai derivatif kontinu dalam interval I

ii. $\varphi\,[x,f(x),f'(x)] = 0$

Definisi 18

$y = f(x)$ disebut solusi dari PD $y' = F(x,y)$ yang melalui $(x_o,y_o) \in D$ jika :

i. $y = f(x)$ kontinu dalam interval $a \le x \le b$ yang bersesuaian dengan D

ii. $y=f(x)$ mempunyai derivatif kontinu dalam $a \le x \le b$

iii. $f'(x) = F[x,f(x)]$

iv. $y_o = f(x_o)$

Definisi 19

Fungsi $F(x,y)$ dikatakan memenuhi syarat Lipschitz dalam domain D jika :

$$\exists\, L \ni |F(x,y_2) - F(x,y_1)| \le L\,|y_2 - y_1|$$

untuk $(x,y_1),(x,y_2) \in D$

Konstanta L disebut dengan **konstanta Lipschitz**

Theorema 7

Jika $f(x)$ mempunyai derivatif dalam $a \le x \le b$ dan memenuhi ketidaksamaan $f'(x) \le k\,f(x)$ dalam $a \le x \le b$ dengan k suatu konstanta, maka $f(x) \le f(a)\,e^{k(x-a)}$

Bukti

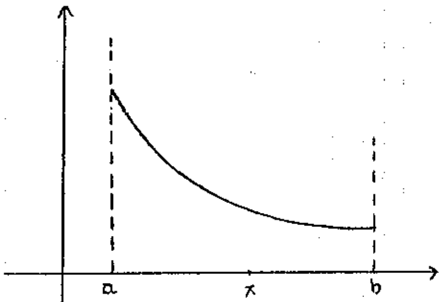
$$f'(x) \le k\,f(x), \quad \text{dikalikan dengan } e^{-kx}$$

$$e^{-kx}\,f'(x) \le e^{-kx}\,k\,f(x), \qquad e^{-kx} > 0$$

$$e^{-kx}[f'(x) - k\,f(x)] \le 0$$

$$\frac{d[e^{-kx}f(x)]}{dx} \le 0$$

$e^{-kx}f(x)$ merupakan fungsi yang monoton turun




$$e^{-kx} f(x) \le e^{-ka} f(a),\ a \le x \le b$$

$$f(x) \le e^{-ka} f(a)\, e^{kx}$$

$$f(x) \le f(a)\, e^{k(x-a)}$$

gambar 2 :

Fungsi monoton turun $e^{-kx} f(x)$

Theorema 8

Bila $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing solusi dari PD $y' = F(x,y)$ dengan $F(x,y)$ memenuhi syarat Lipschitz, maka : $|f(x) - g(x)| \le e^{k(x-a)}|f(a) - g(a)|$

D domain yang bersesuaian dengan $a \le x \le b$

Bukti

$$\sigma(x) = \{f(x) - g\{(x)\}^2 \ge 0$$

Karena $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan solusi dari $y' = F(x,y)$ maka menurut definisi (18), $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai derivatif

$$\sigma'(x) = 2\,\{f(x) - g(x)\}\,\{f'(x) - g'(x)\} \quad \ldots\ldots(a)$$

menurut definisi (19)

$$|F(x,y_2) - F(x,y_1)| \le L\,|y_2 - y_1|$$

$$|F(x,f(x)) - F(x,g(x))| \le L\,|f(x) - g(x)| \quad \ldots\ldots(b)$$

Menurut definisi (18)

$$f'(x) = F(x,f(x))$$

$$g'(x) = F(x,g(x)) \quad \ldots\ldots(c)$$

dari (a) dan (c) maka

$$\sigma'(x) = 2\,\{f(x) - g(x)\}\,\{f(x,f(x)) - F(x,g(x))\}$$

dengan (b) didapat

$$\sigma'(x) \le 2\,|f(x) - g(x)|\,L\,|f(x) - g(x)|$$

$$\le 2\,L\,\{f(x) - g(x)\}^2 = 2\,L\,\sigma(x)$$

Jadi $\sigma'(x) \le k\,\sigma(x)$, dengan $k = 2\,L$

menurut theorema (7) maka

$$\sigma(x) \leq \sigma(a)\ e^{k(x-a)}$$

Jadi $|f(x) - g(x)| \leq e^{k(x-a)}|f(a) - g(a)|$

Theorema 9

Bila F(x,y) memenuhi syarat Lipschitz dalam D, dan $y' = F(x,y)$ mempunyai solusi yang lewat $(a,c) \in D$, maka solusi tersebut adalah tunggal

Bukti

Andaikan ada dua solusi f(x) dan g(x) yang lewat $(a,c) \in D$, menurut definisi (18)

a. f(x) dan g(x) mempunyai derivatif kontinu

b. $f'(x) = F[x,f(x)]$

$g'(x) = F[x,g(x)]$

lewat (a,c), berarti : $c = f(a)$ dan $c = g(a)$

menurut theorema (8) maka

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq e^{k(x-a)}\ |f(a) - g(a)| \\ &\leq e^{k(x-a)}\ |c - c| \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Padahal dari pengandaian

$$f(x) \neq g(x) \Longrightarrow |f(x) - g(x)| \geq 0$$

sehingga $\qquad 0 \leq |f(x) - g(x)| \leq 0$

yang berarti $\qquad |f(x) - g(x)| = 0$

$$f(x) \equiv g(x)$$

2.8.2. <u>Sistem Persamaan Differensial Dimensi n</u>

Definisi 20

a. X vektor dalam ruang metrik dimensi n, ditulis :

$$X = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

b. $\alpha X = \alpha (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots\ldots, \alpha x_n)$

c. $X + Y = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$

$= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots\ldots, x_n+y_n)$

d. $\| X \| = (x_1^2+x_2^2+ \ldots\ldots +x_n^2)^{1/2}$

dan $\| x \|$ disebut norma, yang mempunyai sifat :

i. $\| X \| > 0$

ii. $\| \alpha X \| = | \alpha | \, \| X \|$

iii. $\| X + Y \| \le \| X \| + \| Y \|$

Definisi 21

$X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t)\}$

a. $X(t)$ dikatakan kontinu dalam $t_1 \le t \le t_2$ bila $x_i(t)$ kontinu dalam $t_1 \le t \le t_2$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$.

b. $X(t)$ dikatakan differensiabel dalam $t_1 \le t \le t_2$ bila $X_i(t)$ differensiabel dalam $t_1 \le t \le t_2$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

c. $\int_a^b X(t)\, dt = \int_a^b \{x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t)\}\, dt$

$= \{\int_a^b x_1(t)dt, \int_a^b x_2(t)dt, \ldots\ldots, \int_a^b x_n(t)dt\}$

d. $$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{d\ \{x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t)}{dt}$$

$$= \left\{ \frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \ldots\ldots, \frac{dx_n(x)}{dt} \right\}$$

Pandang sistem persamaan differensial dimensi n :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \quad \text{dengan} \quad X_i = X_i(t) \qquad \ldots\ldots (2.a)$$

Dapat ditulis

$$\left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots\ldots, \frac{dx_n}{dt} \right) = (f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n) \qquad \ldots\ldots (2.b)$$

dan dapat ditulis lebih ringkas

$$\frac{dX}{dt} = F(x,t) \qquad \ldots\ldots (3)$$

yang merupakan PD tingkat satu, dan berlaku sifat-sifat dari PD tingkat satu

Definisi 22

$X(t)$ solusi dari $\frac{dX}{dt} = F(x,t)$ yang melalui $(x_o, t_o)$ apabila berlaku $\frac{dX}{dt} = F(x(t),t)$ di sekitar $(x_o, t_o)$ dan $x(t_o) = x_o$

## 2.8.3. Sistem Persamaan Differensial Linier

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}\, x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n + b_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}\, x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}\, x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n + b_n \quad \ldots\ldots (4) \end{aligned}$$

$a_i$ , $b_i$ , $x_i$ masing-masing merupakan fungsi t

Persamaan (4) dapat ditulis

$$\frac{dX}{dt} = A\,X + B \qquad \ldots\ldots (5)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Definisi 22

$X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t)\}$ merupakan solusi dari $\frac{dX}{dt} = A\,X + B$ yang melewati $(x_o, t_o)$, $t_1 < t < t_2$ jika :

a. $X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t)\}$ kontinu di sekitar $t = t_o$

b. $X'(t) = \{x_1'(t), x_2'(t), \ldots\ldots, x_n'(t)\}$ kontinu di sekitar $t = t_o$

c. $\frac{dX}{dt} = A(t)\,X(t) + B(t)$

d. $x_o = x(t_o) = \{x_{1o}, x_{2o}, \ldots\ldots, x_{no}\}$, dengan $\{x_{io} = x_i(t_o)\}$, dan $\left.\frac{dX(t)}{dt}\right|_{t = t_o} = A(t_o)\,X(t_o) + B(t_o)$

Definisi 23

Pada sistem persamaan (4), jika $B = 0$ maka disebut **sistem persamaan differensial linier homogen.**

Jika $B \neq 0$ disebut **sistem persamaan differensial linier non homogen.**

Definisi 24

Setiap solusi $X = X(t)$ dari sistem homogen $\frac{dX}{dt} = A(t)\,X$ dalam interval $t_1 < t < t_2$, mempunyai sifat :

a. $X(t) = 0$ merupakan solusi trivial

b. Kalau $X(t)$ solusi dan $X(t_o) = 0$, $t_1 < t < t_2$, maka $X(t) = 0$, $(t \neq t_o)$ merupakan solusi non trivial

c.( i). Bila $X_1(t)$ solusi maka $X(t) = a\, X_1(t)$ juga merupakan solusi

(ii). Bila $X_1(t)$ dan $X_2(t)$ solusi maka $X(t) = a\, X_1(t) + b\, X_2(t)$ juga merupakan solusi (dengan a dan b konstanta)

## 2.9. Sistem Autonomous Dimensi Dua

Pandang sistem persamaan differensial linier homogen dimensi dua (yaitu $n = 2$) pada persamaan (4) :

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad \ldots\ldots (6)$$

Definisi 25

Jika koefisien $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, dan $a_{22}$ masing-masing konstanta, maka sistem (6) disebut **sistem autonomous dimensi dua**.

Agar didapat solusi non trivial maka

$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$

2.9.1. Titik Kritis

Pandang sistem autonomous (6) dimensi dua :

$$\frac{dx_1}{dt} = a \quad x_1 + b \quad x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = c \quad x_1 + d \quad x_2 \qquad ; \text{dengan } a.d \neq b.c$$

Atau bila ditulis dalam bentuk umum :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1,x_2)$$

$f_1$ dan $f_2$ didefinisikan pada daerah terbuka terbatas D

Definisi 26

Titik $(x_1,x_2) \in D$ sedemikian sehingga $f_1 = 0$ dan $f_2 = 0$ disebut **titik kritis**, sedang jika tidak demikian disebut **titik regular**

2.9.1. Solusi dari sitem Autonomous

Definisi 27

Suatu kurva C yang menggambarkan solusi dari sistem autonomous pada bidang $(x_1,x_2)$ disebut **trayektori**, sedangkan bidang $(x_1,x_2)$ disebut **bidang fase**

Sekarang pandang sistem autonomous (6)

$$\frac{dx_1}{dt} = a \quad x_1 + b \quad x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = c \quad x_1 + d \quad x_2$$

Titik (0,0) merupakan solusi trivial dari sistem (6).

Untuk mencari solusi non trivial dengan jalan mencari akar-akar karakteristik dari sistem (6), yaitu :

sistem autonomous (6)dapat ditulis dalam bentuk matrik :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

secara singkat didapat :

$$\frac{dX}{dt} = A\ X$$

misal solusi $X = \S\ e^{\lambda t}$

maka $\frac{dX}{dt} = \lambda\ \S\ e^{\lambda t}$

$$A\ X = \lambda\ \S\ e^{\lambda t}$$

$$A\ \S\ e^{\lambda t} = \lambda\ \S\ e^{\lambda t}$$

$$(A\ \S - \lambda\ \S)\ e^{\lambda t} = 0 \quad ; \ e^{\lambda t} \neq 0$$

$$(A - \lambda\ )\ \S = 0$$

$$|A - \lambda\ I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \qquad \ldots\ldots(7)$$

sehingga didapat akar-akar karakteristik $\lambda_1$ dan $\lambda_2$.

Kemungkinan-kemungkinan harga $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ :

( i). $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ berharga real dan $\lambda_1 \neq \lambda_2$

1. $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ sama tanda
2. $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ berlawanan tanda

( ii). $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ berharga real dan $\lambda_1 = \lambda_2$

(iii). $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ bilangan komplek, yang berarti $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$

Uraian masing-masing kemungkinan.

( i). 1. $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ berharga real, sama tanda

Solusi umum sistem autonomous (6)

$$x_1 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x_2 = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \ldots\ldots (8)$$

dengan $A_1, A_2, B_1$, dan $B_2$ masing-masing konstanta untuk mencari arah dari trayektori diambil harga $\lim x_1$ dan $\lim x_2$ , untuk $t \longrightarrow \infty$

Contoh 2

$$\frac{dx_1}{dt} = - x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = - 2x_2$$

Dengan persamaan (7) diperoleh persamaan karakteristik :

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1 \text{ dan } \lambda_2 = -2$$

sehingga solusi umum :

$$x_1 = A e^{-t}$$

$$x_2 = B e^{-2t}$$

untuk melukis trayektori

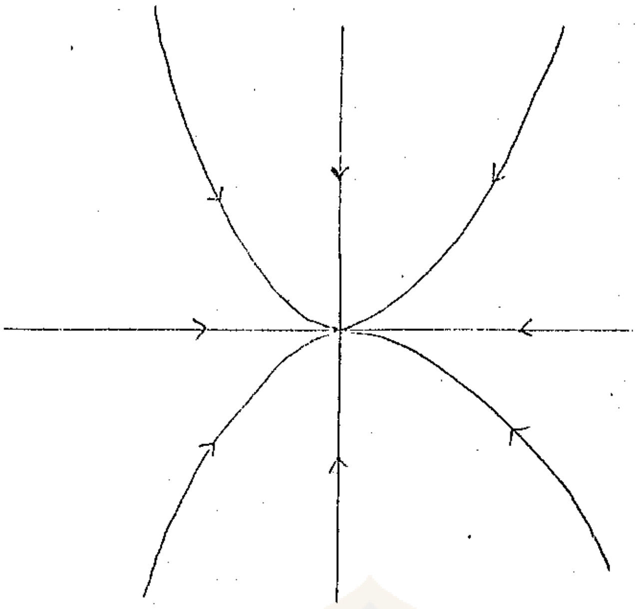
$$x_1 = A e^{-t} \longrightarrow e^{t} = \frac{A}{x_1}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= B e^{-2t} \\ &= B e^{-2t} \\ &= B \left( \frac{A}{x_1} \right)^{-2} \\ &= \frac{B}{A^2} x_1^2 \end{aligned} \qquad \text{(persamaan parabola)}$$

untuk mencari arah trayektori

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} x_1 &= \lim A e^{-t} = 0 \\ \lim_{t \to \infty} x_2 &= \lim B e^{-2t} = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{t \to \infty} (x_1, x_2) = (0,0)$$

sehingga trayektori C berupa parabola yang menuju ke (0,0), $t \longrightarrow \infty$



gambar 9 :

trayektori C dari contoh 2

2. $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ berharga real dan berlawanan tanda

   Solusi umum sistem autonomous (6)

$$x_1 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_1 t}$$

$$x_2 = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \ldots\ldots (9)$$

   dengan $A_1, A_2, B_1$, dan $B_2$ masing-masing konstanta untuk mencari arah dari trayektori diambil harga $\lim x_1$ dan $\lim x_2$ , untuk $t \longrightarrow \infty$

Contoh 3

$$\frac{dx_1}{dt} = - x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_2$$

dengan persamaan (7) diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = 2$$

sehingga solusi umum

$$x_1 = A e^{-t}$$

$$x_2 = B e^{2t}$$

untuk melukis trayektori

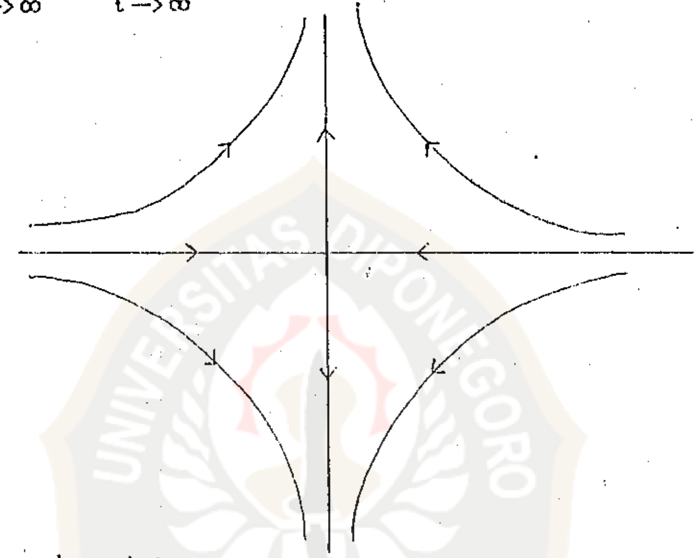
$$x_1 = A e^{-t} \Longrightarrow e^t = \frac{A}{x_1}$$

$$x_2 = B e^{2t}$$

$$= B \left( \frac{A}{x_1} \right)^2 \qquad \text{(persamaan hiperbola)}$$

untuk mencari arah trayektori

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to \infty} x_1 = \lim\limits_{t \to \infty} A\ e^{-t} = 0 \\ \lim\limits_{t \to \infty} x_2 = \lim\limits_{t \to \infty} B\ e^{2t} = \infty \end{array}\right\}$$ untuk $t \to \infty$, trayektori berupa hiperbola yang mendekati sumbu $x_2$



gambar 4 :

trayektori C dari contoh 3

( ii). $\lambda_1 = \lambda_2$ berharga real

Solusi dari sistem autonomous (6)

$$x_1 = (A_1 + A_2\ t)\ e^{-\lambda t}$$

$$x_2 = (B_1 + B_2\ t)\ e^{-\lambda t} \qquad \ldots\ldots. \ (10)$$

dengan $A_1, A_2, B_1$, dan $B_2$ masing-masing konstanta untuk mencari arah dari trayektori diambil harga $\lim x_1$ dan $\lim x_2$ , untuk $t \to \infty$

Contoh 4

$$\frac{dx_1}{dt} = -2\ x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2$$

dengan persamaan (7) diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + 4\ \lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

sehingga solusi umum

$$x_1 = A\, e^{-2t}$$

$$x_2 = (B_1 + B_2\, t)\, e^{-2t}$$

untuk melukis trayektori

$$x_1 = A\, e^{-2t} \longrightarrow e^{2t} = \frac{A}{x_1}$$

$$t = \frac{1}{2} \ln \frac{A}{x_1}$$

$$x_2 = (B_1 + B_2\, t)\, e^{-2t}$$

$$= (B_1 + B_1 \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{A}{x_1}) \frac{x_1}{A}$$

$$= \frac{B_1}{A} x_1 + \frac{B_2}{2A} x_1 \ln \frac{A}{x_1}$$

untuk mencari arah trayektori

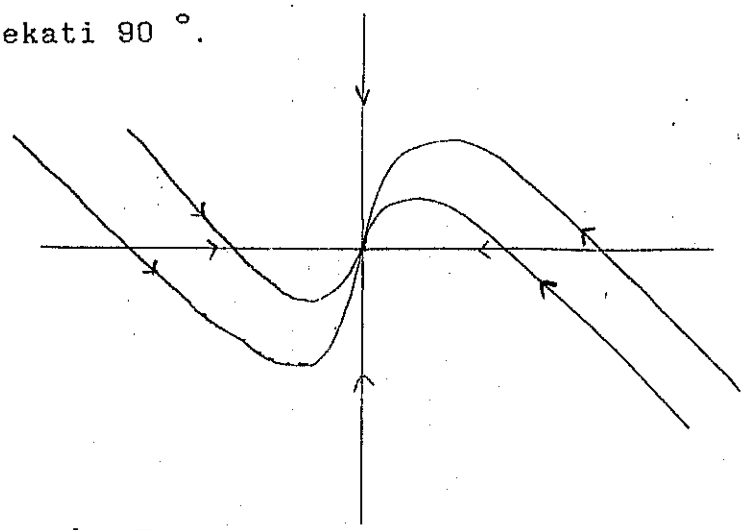
$$\left.\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} x_1 &= \lim_{t \to \infty} A\, e^{-2t} = 0 \\ \lim_{t \to \infty} x_2 &= \lim_{t \to \infty} (B_1 + B_2\, t)\, e^{-2t} = 0 \end{aligned}\right\}$$

untuk $t \longrightarrow \infty$ arah trayek tori menuju titik (0,0)

menentukan koefisien arah trayektori

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x_2}{x_1} = \frac{(B_1 + B_2\, t)\, e^{-2t}}{A\, e^{-2t}} = \infty$$

sehingga untuk $t \longrightarrow \infty$, sudut kemiringan trayektori C mendekati 90 °.



gambar 5 :

trayektori C dari contoh 4

(iii). $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ bilangan komplek ( $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$ )

Solusi umum dari sistem (6)

untuk $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ dan $\lambda_2 = \alpha - \beta i$

$$x_1 = e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

$$x_2 = e^{\alpha t}(B \cos \beta t - A \sin \beta t) \quad \ldots\ldots(11)$$

dengan A dan B masing-masing konstanta

untuk mencari arah dari trayektori diambil harga

lim $x_1$ dan lim $x_2$ , untuk $t \longrightarrow \infty$

Contoh 5

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 5x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 3x_2$$

dengan persamaan (7) diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$$

atau $\alpha = 2$ dan $\beta = 2$

sehingga solusi umum

$$x_1 = e^{2t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$$

$$x_2 = e^{2t}(B \cos 2t - A \sin 2t)$$

untuk melukis trayektori

diambil substitusi : $x_1 = r \cos \theta$ dan $x_2 = r \sin \theta$

dan $R = (A^2 + B^2)^{1/2}$ ; $R \cos \alpha = A$ dan $R \sin \alpha = B$

sehingga solusi umum menjadi

$$x_1 = e^{2t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$$

$$r \cos \theta = e^{2t}(R \cos \alpha \cos 2t + R \sin \alpha \sin 2t)$$

$$r \cos \theta = R e^{2t} \cos(\alpha - 2t)$$

yang berarti :

$$r = R e^{2t} \quad \text{dan} \quad \theta = \alpha - 2t$$

$$t = -\frac{\theta - \alpha}{2}$$

jadi solusinya :

$$r = R\, e^{2\left(-\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}$$

$$= R\, e^{-\theta+\alpha}\text{, dengan } R \text{ dan } \alpha \text{ konstanta}$$

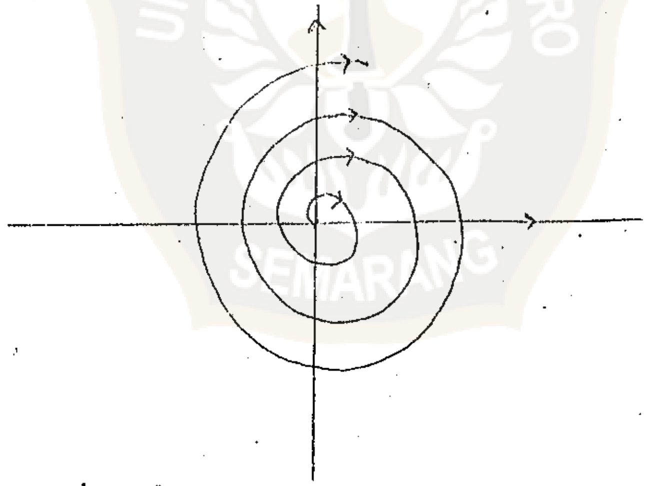
untuk $\left.\begin{array}{l}\theta \longrightarrow -\infty \longrightarrow r \longrightarrow \infty \\ \theta \longrightarrow \infty \longrightarrow r \longrightarrow \infty\end{array}\right\}\begin{array}{l}\theta \gg \longrightarrow r \ll \\ \theta \ll \longrightarrow r \gg\end{array}$

untuk menentukan arah trayektori

$$\lim_{t \to \infty} x_1 = \lim_{t \to \infty} e^{2t} (A \cos 2t + B \sin 2t) = \infty$$

$$\lim_{t \to \infty} x_1 = \lim_{t \to \infty} e^{2t} (B \cos 2t - A \sin 2t) = \infty$$

sehingga trayektori berupa spiral yang keluar dari (0,0), untuk $t \longrightarrow \infty$



gambar 6 :

trayektori C dari contoh 5